Série 1 des Travaux Dirigés
Introduction aux phénomènes aléatoires

1. Opérations sur les ensembles

Q1.1. Soient $U = \{1,2,..,8,9\}$, $A = \{1,2,3,4\}$, $B = \{2,4,6,8\}$ et $C = \{3,4,5,6\}$. Déterminer : (i) CA, (ii) $A \cap C$, (iii) $(\overline{A \cap C})$, (iv) $A\, UB$, (v) $C_B C$.

Q1.2. $U = \{a,b,c,d,e\}$, $A = \{a,b,d\}$ et $B = \{b,d,e\}$. Déterminer :

i. $A\, UB$ *ii.* $B \cap A$ *iii.* CB *iv.* $C_B A$
v. $CA \cap B$ *vi.* $A\, UCB$ *vii.* $A \cap CB$ *viii.* $C\,(A \cap B)$

Q1.3. Soient $M = \{T,S,E\}$ et $W = \{A,B\}$. Déterminer $M \times W$

Q1.4. Soient $A = \{1,2,3\}$, $B = \{2,4\}$ et $C = \{3,4,5\}$. Déterminer $A \times B \times C$.

Q1.5. Soient $A = \{a,b\}$, $B = \{2,3\}$ et $C = \{3,4\}$. Déterminer : (i) $A \times (B \cup C)$, (ii) $(A \times B) \cup (A \times C)$, (iii) $A \times (B \cap C)$, (iv) $(A \times B) \cap (A \times C)$.

Q1.6. Déterminer l'ensemble des parties, $\mathcal{P}(S)$, de l'ensemble $S = \{1,2,3\}$

Q1.7. Soient $X = \{a,b,c,d,e,f,g\}$ et :

(i) $A_1 = \{a,c,e\}$, $A_2 = \{b\}$, $A_3 = \{d,g\}$;
(ii) $B_1 = \{a,e,,q\}$, $B_2 = (c,d\}$, $B_3 = \{b,e,f\}$;
(iii) $C_1 = \{a,b,e,g\}$, $C_2 = \{c\}$, $C_3 = \{d,f\}$;
(iv) $D_1 = \{a,b,c,d,e,f,g\}$.
(v) Parmi les ensembles $\{A_1, A_2, A_3\}$, $\{B_1, B_2, B_3\}$, $\{C_1, C_2, C_3\}$, $\{D_1\}$ quels sont ceux qui constituent des partitions de X ?

Q1.8. Soient A, B et C trois évènements. Ecrire les expressions suivantes en utilisant la notation des ensembles.

(i) A se produit mais ni B ni C ne se produisent.
(ii) A et B se produisent mais pas C
(iii) A ou B se produisent mais pas C
(iv) Aucun de A, B et C ne se produisent.
(v) A, B ou C se produisent.
(vi) Soit A se produit mais pas B, ou B se produit mais pas A.
(vii) Deux ou plus de A, B et C se produisent.
(viii) Exactement deux de A, B et C se produisent.
(ix) Moins de deux de A, B et C se produisent.
(x) Exactement un de A, B et C se produit.

2. Principes de dénombrement

Q2.1. Calculer 4! , 5! , 6! , 7! et 8!

Q2.2. Calculer (i) $\frac{13!}{11!}$ (ii) $\frac{7!}{10!}$ (iii) $\frac{9!}{2!}$ (iv) $\frac{4!}{9!}$

Q2.3. Soit A et B, les deux ensembles suivants : $A = \{Kamel, Bader, Ahmed, Saida\}$ et $B = \{1,3,5,7\}$. Ecrire toutes les dispositions de trois éléments, non ordonnées et sans répétitions que l'on peut faire avec les éléments de A et écrire toutes les dispositions de deux éléments, ordonnées et avec répétitions que l'on peut faire avec les éléments de B

Q2.4. Combien de repas complets différents peut-on former si une cafeteria propose deux choix de soupe, trois choix de repas principal et trois choix de dessert ?

Q2.5. Une librairie possède 40 000 livres à identifier par un code alphanumérique (chaque élément du code peut être un chiffre de 0 à 9 ou une lettre). Quelle longueur minimale doit avoir le code pour que chaque livre ait un code unique.

Q2.6. De combien de façons peut-on aller de Tanger à Casablanca, puis à Agadir si le trajet entre chaque ville peut se faire en voiture, en autobus, par train ou par avion ?

3. Permutations, arrangements et combinaisons

Q3.1. En supposant qu'il n'y a pas de répétitions,

(i) Combien de nombres de 3 chiffres peut-on former à l'aide des six chiffres 2, 3, 5, 6, 7 et 9 ?
(ii) Combien de ces nombres sont inférieurs à 400 ?
(iii) Combien sont pairs ?
(iv) Combien sont impairs ?
(v) Combien sont des multiples de 5 ?

Q3.2. Construire le diagramme en arbre correspondant au nombre de permutations de $\{a,b,c,d\}$

Q3.3. De combien de façons différentes peut-on répartir un groupe de 7 personnes

(i) Sur une rangée de 7 chaises ?
(ii) Autour d'une table ronde ?

Q3.4. Combien de permutations distinctes peut-on former avec toutes les lettres des mots (d'anagrammes) MISTASSINI, SOCIOLOGIQUE.

Q3.5. On veut former des mots en permutant les lettres du mot PARALLELE. (i) Combien de mots peut-on former ? Combien de ces mots commencent par R et se terminent par L ? Combien y en a-t-il où les L se suivent ?

Q3.6. Supposons qu'une urne contient 8 boules. Déterminer le nombre d'échantillons de taille 3 (i) non exhaustifs, (ii) exhaustifs.

Q3.7. Calculer n quand (i)$A_n^2 = 72$, (ii) $A_n^4 = 42\ A_n^2$, (iii) $2A_n^2 + 50 = A_{2n}^2$ (iv), $8A_4^n = A_5^{n+1}$

4. Binôme de Newton et Triangle de Pascal

Q4.1. Calculer (i) $\binom{16}{3}$, (ii) $\binom{12}{4}$, (iii) $\binom{15}{5}$

Q4.2. Calculer (i) $\binom{8}{5}$, (ii) $\binom{9}{7}$, (iii) $\binom{10}{6}$

Q4.3. Développer et simplifier (i) $(2x + y^2)^5$, (ii) $(x^2 + 2y)^6$

Q4.4. Calculer les coefficients multinomiaux suivants : (i) $\binom{6}{3,\ 2,\ 1}$, (ii) $\binom{8}{4,\ 2,\ 2,\ 0}$, (ii) $\binom{10}{5,\ 3,\ 2,\ 2}$

Q4.5. Trouver le septième terme du développement de $(a + b)^8$

Q4.6. Trouver le terme contenant $x^{21}y^5$ dans le développement de $(x^3 - y)^{12}$

5. Combinaisons

Q5.1. Trouver n quand (i) $(n!)^2 + 720 = 126(n!)$ (ii) $C_2^n = 55$,

Q5.2. De combien de manières peut-on former un jury de 3 hommes et 2 femmes parmi 7 hommes et 5 femmes ?

Q5.3. Une classe comporte 9 garçons et 3 filles. (i) De combien de manières le professeur peut-il faire un choix de 4 élèves ? (ii) Combien de ces choix comportent au moins une fille ? (iii) Combien comportent exactement une fille ?